孤立した大きな部分商を持つ無理数回転の discrepancy について

瀬戸口　貴義　((有) 瀬戸口瓦工場)[*1]
高嶋　恵三　　(岡山理科大学)[*2]

連分数展開の早い段階で孤立した大きな部分商が出現するある特殊な無理数について考える. 無理数 α に対して無理数回転 $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}} = \{\{n\alpha\} : n \in \mathbb{N}\}$ の経験分布 $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_{[0,a)}(\{n\alpha\})$ の一様分布からの隔たりを測る量として次の discrepancy が良く使われる：

$$D_N^*(n\alpha) = \sup_{0<a\leq 1} \left| \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_{[0,a)}(\{n\alpha\}) - a \right|,$$

ここで $\{n\alpha\}$ は $n\alpha$ の小数部分とする. 一般に, $N \to \infty$ のとき $D_N^*(n\alpha)$ の値は 0 に収束することが知られている. しかしながら α の連分数展開に孤立した大きな部分商が出現する場合, $D_N^*(n\alpha)$ の値はすぐには収束せず放物線のような形状をした large hill を周期的に繰り返し, さらに孤立した大きな部分商までの近似分数の分母とその周期がほぼ一致するという極めて不可思議な現象が観測されている. 本研究では, 孤立した大きな部分商が $D_N^*(n\alpha)$ の周期的な増減を引き起こすことの数学的な説明を与え, さらに部分商の大きさについての条件を与えた.

Notation. 連分数展開を $\alpha = [0; a_1, a_2, \ldots]$ と略記し, n 次近似分数を $r_n = p_n/q_n = [0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ とする. 自然数 N を q_j の線形和で表す Ostrowski 表現を次で与える：$N = \sum_{j=0}^{m} b_j q_j$, ここで $0 \leq b_j \leq a_{j+1}$, $b_j = a_{j+1} \Rightarrow b_{j-1} = 0$, $q_m \leq N < q_{m+1}$.

Discrepancy を具体的に計算する上で, Schoissengeier [1] の正確な公式が知られているが, 彼の結果は discrepancy の挙動を評価するには複雑すぎてあまり適切ではない. そこで, 彼の結果を改良した次の結果を得た：

Theorem 1. 無理数 α $(0 < \alpha < 1/2)$ に対して次が成り立つ：

$$\begin{aligned} &ND_N^*(n\alpha) \\ &= \max\left(\sum_{j=0}^{[m/2]} b_{2j}(1 - q_{2j}A_{2j}), \sum_{j=0}^{[(m-1)/2]} b_{2j+1}(1 + q_{2j+1}A_{2j+1}) + A_0 \right) + c, \end{aligned}$$

ここで $A_j := \sum_{t=0}^{j-1} b_t q_t(\alpha - r_j) + \sum_{t=j}^{m} b_t(q_t\alpha - p_t)$, $-1 \leq c < [(m+1)/2] + 1$.

Theorem 1 を用いて, $D_N^*(n\alpha)$ のグラフに出現する large hill と谷の部分の評価を与えた. 以下では, 孤立した大きな部分商を a_η で表す. 例えば,

$$1 - \log_{10} 7 = [0; 6, 2, 5, 6, 1, 4813, 1, 1, 2, \ldots]$$

2010 Mathematics Subject Classification: 11K38, 11K31, 11A55
キーワード：discrepancy, irrational rotation, continued fraction, Ostrowski representation.
[*1] 〒 895-2104 鹿児島県薩摩郡さつま町柏原 3100　(有) 瀬戸口瓦工場
e-mail: setokuchi@athena.ocn.ne.jp
[*2] e-mail: takashim@xmath.ous.ac.jp

の場合, $a_\eta = 4813$ (i.e., $\eta = 6$). グラフの形状は α により多少異なるので, 以下では $1-\log_{10} 7$ について主に議論する. その他の α についても以下の議論は同様に成り立つ.

始めに, $D_N^*(n\alpha)$ のグラフの谷の部分の上からの評価を与え, $D_N^*(n\alpha)$ が非常に小さい値となることを示した. 次に, 谷には一点から成る one-point valley とそれよりも少し幅の広い wider valley の二種類の谷が存在することを明確にした. この wider valley における $D_N^*(n\alpha)$ の評価を与えるために次の $M(N)$ を導入する：

$$M(N) = \max\left(\sum_{\substack{j=0 \\ j\neq(\eta-1)/2}}^{[m/2]} a_{2j+1}, \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq\eta/2}}^{[(m+1)/2]} a_{2j} \right).$$

この $M(N)$ を用いて, wider valley における $D_N^*(n\alpha)$ の上からの評価を得た：

Theorem 2. *α $(0<\alpha<1/2)$ を無理数とし, $M(N) \geq \left[\frac{m+1}{2}\right] + 2$ を仮定する. このとき $N \in I$ に対して次が成り立つ：*

$$ND_N^*(n\alpha) < 2M(N),$$

ここで I は wider valley intervals とする. 例えば$\alpha = 1-\log_{10} 7$ の場合, $I = [q_\eta, q_{\eta+1})$ or $[q_{\eta+2}+q_\eta, q_{\eta+2}+q_{\eta+1})$.

最後に, $D_N^*(n\alpha)$ の large hill に対する評価を与える. $f(x)$ を二次関数 $f(x) = x(1-x)$, $0 \leq x \leq 1$ とする. 良く知られているように, $f(x)$ は $x=0$ または1 のとき $f(x)=0$, $x=1/2$ のとき$f(x)=1/4$ となる. このとき次が成り立つ：

Theorem 3. *無理数 α $(0<\alpha<1/2)$ が次の条件をみたす孤立した大きな部分商 a_η を持つとする：*

$$a_\eta > 12M(N). \tag{1}$$

このとき $M(N) \geq 5$ を仮定すると $N \in I$ に対して次が成り立つ：

$$-M(N) < ND_N^*(n\alpha) - a_\eta f(x') < 3M(N) \quad \textit{for } x' = \frac{N'}{a_\eta q_{\eta-1}},$$

ここで$N' := N - \sum_{j=0, j\neq\eta-1}^{m} b_j q_j$ とし, I は hill intervals とする. 例えば$\alpha = 1-\log_{10} 7$ の場合, $I = [q_{\eta+1}, q_{\eta+2})$, $[q_{\eta+2}, q_{\eta+2}+q_\eta)$ or $[q_{\eta+2}+q_{\eta+1}, 2q_{\eta+2})$.

Theorem 3 より, large hill の peak の値は下から$a_\eta f(1/2) - M(N) = a_\eta/4 - M(N)$ で評価できる. したがって a_η が条件 (1) をみたせば, large hill の peak は wider valley のupper bound $2M(N)$ よりも十分大きいことがわかる.

参考文献

[1] J. Schoissengeier, On the discrepancy of $(n\alpha)$, *Acta Arith.*, **44** (1984), 241–279.

[2] T. Setokuchi and K. Takashima, Discrepancies of irrational rotations with isolated large partial quotients, *Unif. Distrib. Theory* (2) **9** (2014), 31–57.