孤立した大きな部分商を持つ無理数回転の discrepancy の長期的振る舞い

瀬戸口　貴義　((有) 瀬戸口瓦工場)*1
高嶋　恵三　　(岡山理科大学)*2

無理数 $\alpha \in (0,1)$ に対して, 無理数回転 $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}} = \{\{n\alpha\} : n \in \mathbb{N}\}$ の経験分布 $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_{[0,a)}(\{n\alpha\})$ の一様分布からの隔たりを測る量として次の discrepancy が良く使われる：

$$D_N^*(n\alpha) = \sup_{0<a\le 1} \left| \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_{[0,a)}(\{n\alpha\}) - a \right|,$$

ここで $\{n\alpha\}$ は $n\alpha$ の小数部分とする. 一般に $N \to \infty$ のとき $D_N^*(n\alpha)$ の値は 0 に収束することが知られている.

Setokuchi and Takashima [3] では, 連分数展開の早い段階で孤立した大きな部分商が出現するある特殊な無理数に対する $D_N^*(n\alpha)$ の挙動について考察した. その結果, 連分数展開に孤立した大きな部分商が出現する場合, $D_N^*(n\alpha)$ の値はすぐには収束せず放物線のような形状をした large hill を周期的に繰り返すという極めて不可思議な現象が観測された.

Discrepancy の値を具体的に計算する上で, Schoissengeier [1] の正確な公式が知られているが, 彼の結果は $D_N^*(n\alpha)$ の挙動を評価するには複雑すぎてあまり適切ではない. そこで [3] では $D_N^*(n\alpha)$ を厳密に評価する Ostrowski 表現について詳しく調べ, [1] の結果を改良した. この結果を用いて, 孤立した大きな部分商を持つ無理数に対する $D_N^*(n\alpha)$ の精密な評価を与え, 孤立した大きな部分商が $D_N^*(n\alpha)$ の周期的な増減を引き起こすことの数学的な説明を与えた.

[3] で得られた評価は $D_N^*(n\alpha)$ の周期的な増減の最初の幾つかに関するものであった. そこで Setokuchi [2] では [3] の評価の適用範囲を延長し, $D_N^*(n\alpha)$ の長期的振る舞いに対する評価と周期的な増減の繰り返しに関する条件を与えた. 本講演では [2] で得られた結果について主に述べる.

Notation. 連分数展開を $\alpha = [0; a_1, a_2, \ldots]$ と略記し, n 次近似分数を $r_n = p_n/q_n = [0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ とする. 孤立した大きな部分商を a_η で表す. 例えば,

$$1 - \log_{10} 7 = [0; 6, 2, 5, 6, 1, 4813, 1, 1, 2, \ldots]$$

の場合, $a_\eta = 4813$ (i.e., $\eta = 6$). 自然数 N を q_j の線形和で表す Ostrowski 表現を次で与える：$N = \sum_{j=0}^{m} b_j q_j$, ここで $0 \le b_j \le a_{j+1}$, $b_j = a_{j+1} \Rightarrow b_{j-1} = 0$, $q_m \le N < q_{m+1}$. さらに $M(N)$ を次で定義する：

$$M(N) = \max\left(\sum_{\substack{j=0 \\ j\ne(\eta-1)/2}}^{[m/2]} a_{2j+1}, \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne\eta/2}}^{[(m+1)/2]} a_{2j} \right).$$

キーワード：discrepancy, irrational rotation, continued fraction, Ostrowski representation.
*1 〒895-2104 鹿児島県薩摩郡さつま町柏原 3100　(有) 瀬戸口瓦工場
e-mail: setokuchi@athena.ocn.ne.jp
*2 〒700-0005 岡山県岡山市北区理大町 1-1　岡山理科大学 理学部
e-mail: takashim@xmath.ous.ac.jp

始めに $D_N^*(n\alpha)$ のグラフの谷には一点から成る one-point valley とそれよりも少し幅の広い wider valley の二種類の谷が存在することを明確にし, さらにこれらの谷の出現の仕方が $a_j = 1$ または$a_j > 1$ $(j \geq \eta + 1)$ によって異なることを示した. One-point valley と wider valley の端点は一般に次で表される：

$$N = \sum_{j=\eta}^{m} b_j q_j.$$

このとき次が成り立つ.

Theorem 1. α $(0 < \alpha < 1/2)$ を無理数とし, $\eta \geq 3$ とする. このとき $N = \sum_{j=\eta}^{m} b_j q_j$ に対して次が成り立つ：

$$ND_N^*(n\alpha) < 2M(N),$$

ここで $0 \leq b_j \leq a_{j+1}$ $(\eta \leq j \leq m)$ とする.

次に wider valley 全体の評価を与える. I_w を次で定義する：

$$I_w = \bigcup_{k=\eta+1}^{m} \left(\bigcup_{b_j' s} \left[\sum_{\substack{j=\eta+1 \\ b_{\eta+1} \neq a_{\eta+2}}}^{k} b_j q_j + a_{\eta+1} q_\eta, \sum_{\substack{j=\eta+1 \\ b_{\eta+1} \neq a_{\eta+2}}}^{k} b_j q_j + q_{\eta+1} \right) \right).$$

このとき [ ) は一つの wider valley を表し, I_w はそれらの和集合をとったもので N が q_{m+1} までの全ての wider valley を含む. このとき次が成り立つ.

Theorem 2. α $(0 < \alpha < 1/2)$ を無理数とし, $M(N) \geq \left[\frac{m+1}{2}\right] + 2$ を仮定する. このとき $N \in I_w$ に対して次が成り立つ：

$$ND_N^*(n\alpha) < 2M(N).$$

最後に large hill 全体の評価を与える. $f(x)$ を二次関数 $f(x) = x(1-x)$, $0 \leq x \leq 1$ とする. このとき次が成り立つ.

Theorem 3. 無理数 α $(0 < \alpha < 1/2)$ が次の条件をみたす孤立した大きな部分商 a_η を持つとする：

$$a_\eta > 12M(N).$$

このとき $M(N) \geq 5$ を仮定すると $N \notin I_w$ に対して次が成り立つ：

$$-M(N) < ND_N^*(n\alpha) - a_\eta f(x') < 3M(N) \quad for\ x' = \frac{N'}{a_\eta q_{\eta-1}},$$

ここで $N' := N - \sum_{j=0, j\neq\eta-1}^{m} b_j q_j$.

この結果は, 孤立した大きな部分商 a_η が条件$a_\eta > 12M(N)$ をみたす範囲で$D_N^*(n\alpha)$ は周期的増減を繰り返し続けることを保証する.

参考文献

[1] J. Schoissengeier, On the discrepancy of $(n\alpha)$, *Acta Arith.*, **44** (1984), 241–279.

[2] T. Setokuchi, Long-term behavior of discrepancies of irrational rotations with single isolated large partial quotient, *submitted*.

[3] T. Setokuchi and K. Takashima, Discrepancies of irrational rotations with isolated large partial quotients, *Unif. Distrib. Theory* (2) **9** (2014), 31–57.